به‌نام خدا

آزمون تستی درس: هندسه تحلیلی | موضوع: ضرب خارجی بردارها | زمان: ۱۵ دقیقه

۱. اگر $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$ ، $\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ و $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ باشد، حاصل $|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$ کدام است؟

۱) ۱ , ۲ ۲) ۰ , ۱ ۳) ۲ , ۳ ۴) ۱ , $\sqrt{۲}$

۲. مساحت متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن $(۲\vec{a}+\vec{b})$ و $(۳\vec{a}-\vec{b})$ هستند، چند برابر مساحت مثلثی است که اضلاع آن $\vec{a}$ و $۲\vec{b}$ است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳. اگر بردار $\vec{c}$ با اندازه‌ی ۲ واحد بر بردارهای یکه‌ی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود باشد و زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ۴۵° باشد، حاصل $|(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۴. طول بردار $(\vec{i}+\vec{j})\times\vec{k}+(\vec{i}+\vec{j})\times\vec{k}-(\vec{k}\times\vec{j})$ چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{۱۱}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۲۳}$

۵. بردارهای $\vec{a}=(۱,۳,۲)$ ، $\vec{b}=(-۱,۰,۳)$ و $\vec{c}=(۰,۲,۳)$ مفروض‌اند. مجموع مؤلفه‌های بردار $(\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{b}$ کدام است؟

۱) -۲۹ ۲) ۲۹ ۳) ۷ ۴) -۷

۶. حجم متوازی‌السطوح ساخته شده بر سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۳)$ ، $\vec{b}=(۱,۳,۱)$ و $\vec{c}$ که $|\vec{c}|=\sqrt{۴۶}$ حداکثر مقدار خود است. مجموع مؤلفه‌های $\vec{c}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

۷. اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{۰}$ باشد، حاصل $\vec{a}\times\vec{b}$ کدام است؟

۱) $\vec{c}\times\vec{b}$ ۲) $\vec{a}\times\vec{c}$ ۳) $\vec{b}\times\vec{a}$ ۴) $\vec{c}\times\vec{a}$

۸. چند مورد از عبارت‌های زیر بی‌معنی است؟

الف) $\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}$ ب) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ ج) $\vec{a}\times(\vec{b}.\vec{c})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

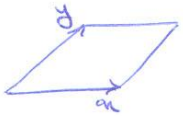
۹. مختصات چهار رأس هرمی $A=(۱,۲,۳)$ ، $B=(۱,۲,۱)$ ، $C=(۱,۶,۱)$ و $D=(-۱,۲,۴)$ است. حجم هرم چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۰. بردارهای $\vec{a}=(۱,۰,۱)$ و $\vec{b}=(۰,-۲,۰)$ با کدام بردار هم‌صفحه‌اند؟

۱) $(۱,۲,۲)$ ۲) $(۲,۲,۲)$ ۳) $(۳,۲,۲)$ ۴) $(۴,۲,۲)$

سؤال ۲ :



$S_{\square} = |x \times y| \Rightarrow S = |\frac{5}{2} a \times (-\frac{1}{2} a + b)| = \frac{5}{2} |a \times b|$

قطرها : $\begin{cases} x + y = 2a + b \\ x - y = 3a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{5}{2} a \\ y = -\frac{1}{2} a + b \end{matrix}$

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |a \times (2b)| = |a \times b| \qquad \frac{S_{\square}}{S_{\Delta}} = \frac{5}{2}$

سؤال ۵ راه اول :

$(a \times c) \times b = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-9, -17, -3)$

$a \times c = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (5, -3, 2)$ جمع مؤلفه‌ها $= -29$

راه دوم :

$(a \times c) \times b = \overset{5}{\cancel{(a \cdot b)}} c - \overset{9}{\cancel{(c \cdot b)}} a$

$= 5(0, 2, 3) - 9(1, 3, 2)$

$= (-9, -17, -3) \xrightarrow{\text{جمع مؤلفه‌ها}} = -29$

سؤال ۶ :

V متوازی‌السطوح $= |a \cdot (b \times c)| = |c \cdot (a \times b)|$

$a \times b = (-6, 1, 3)$

$V = |c \cdot \underbrace{(-6, 1, 3)}_{a \times b}|$

$= |c| |(-6, 1, 3)| |\overset{1}{\cancel{\cos\alpha}}|$ α: زاویه بین c و $a \times b$

$= \sqrt{46} \sqrt{46} \times 1$ V در صورتی Max است که $\cos\alpha = 1$

$\Rightarrow V = 46$

$\Downarrow$

بردار c در راستای $a \times b$ است.

$\Rightarrow c = k(a \times b) = k(-6, 1, 3) \rightarrow |c| = \cancel{\sqrt{46}} = \sqrt{36k^2 + k^2 + 9k^2} = |k| \cancel{\sqrt{46}}$

$\Rightarrow k = \pm 1$

$c = (-6, 1, 3) \xrightarrow{\text{جمع مؤلفه‌ها}} -2$

$c = (6, -1, -3) \xrightarrow{\text{〃}} 2$